FO 8 - Variations

Cours

Définition : Une fonction f est dite :

- **croissante** sur un intervalle I si pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$ (strictement croissante si $f(x_1) < f(x_2)$) ;
- **décroissante** sur un intervalle I si pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$ (strictement décroissante si $f(x_1) > f(x_2)$) ;
- **constante** sur un intervalle I si pour tous réels x_1 et x_2 de I, on a $f(x_1) = f(x_2)$.

Exemples :

1. La fonction f définie par $f(x) = 2x+1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car pour tous réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) = 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 = f(x_2)$. En particulier : $0 < 1 \Rightarrow f(0) = 1 < 3 = f(1)$.
2. La fonction g définie par $g(x) = -x + 3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car pour tous réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$, on a $g(x_1) = -x_1 + 3 > -x_2 + 3 = g(x_2)$. En particulier : $0 < 1 \Rightarrow g(0) = 3 > 2 = g(1)$.
3. La fonction h définie par $h(x) = 5$ est constante sur $\mathbb{R}$ car pour tous réels x_1 et x_2, on a $h(x_1) = 5 = h(x_2)$.

Remarques : On peut interpréter cette définition de la façon suivante :

- f est dite croissante si les images et les antécédents sont rangés dans le même ordre ;
- f est dite décroissante si les images et les antécédents sont rangés dans l'ordre inverse.

Notation : On peut résumer les variations d'une fonction à l'aide d'un tableau de variations.

Exemple : Par exemple, pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ décroissante sur $]-\infty; 0[$, croissante sur $]0; 5]$ et décroissante sur $[5; +\infty[$, le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

Définition : Une fonction est dite monotone sur un intervalle I si elle est soit croissante, soit décroissante sur cet intervalle.

Définition : Un **maximum** (resp. un **minimum**) local de f est une valeur $f(c)$ telle que $f(c) \geq f(x)$ (resp. $f(c) \leq f(x)$) pour tous x suffisamment proches de c.

Remarque : Un maximum (resp. un minimum) local correspond à un "sommet" (resp. un "creux") dans le graphe de la fonction.

Exemple : Dans le tableau de variations précédent, la fonction f admet un minimum local en $x = 0$ et un maximum local en $x = 5$.

Définition : Un maximum (resp. un minimum) global de f est une valeur $f(c)$ telle que $f(c) \geq f(x)$ (resp. $f(c) \leq f(x)$) pour tous x dans le domaine de définition de f.

Méthode : Pour déterminer les extremums (maximums et minimums) d'une fonction f sur un intervalle I, on peut tracer son tableau de variation et indiquer les valeurs atteintes.

Exemple : On considère le tableau de variation de la fonction f défini sur l'intervalle $[-2; 4]$:

x	-2		1		3		4
f	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

On en déduit que :

- Le maximum global de f sur $[-2; 4]$ est 5 atteint en -2 ;
- Le minimum global de f sur $[-2; 4]$ est -1 atteint en 1 ;
- La fonction f admet un minimum local en 4 de valeur 0 ;
- La fonction f admet un maximum local en 3 de valeur 4.

Exercices

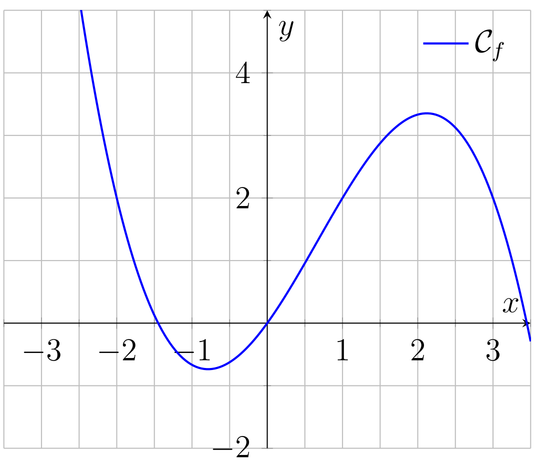
Exercice 1 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ croissante sur $]-\infty; 2]$ et décroissante sur $[2; 5]$ puis croissante sur $[5; +\infty[$. Dresser le tableau de variations correspondant.

Exercice 2 : Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ croissante sur $]-\infty; 0[$, décroissante sur $]0; 4]$ puis croissante sur $[4; +\infty[$. Dresser le tableau de variations correspondant.

Exercice 3 : Déterminer les extremums de la fonction f admettant le tableau de variations suivant :

x	-3		0		2		5
f	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

Exercice 4 : Soit la fonction f définie sur $[-3; 3]$ par la courbe ci-dessous.



1. Dresser le tableau de variations de f sur $[-3; 3]$.
2. Déterminer les extremums (maximums et minimums) de f sur $[-3; 3]$.