FO 7 - Signe d'une fonction

Cours

Définition : Le **signe** d'une fonction f est le signe des nombres $f(x)$ pour les différentes valeurs de x dans son domaine de définition. On dit que :

- La fonction f est **positive** lorsque $f(x) \geq 0$ (strictement si $f(x) > 0$) ;
- La fonction f est **négative** lorsque $f(x) \leq 0$ (strictement si $f(x) < 0$) ;
- La fonction f est **nulle** lorsque $f(x) = 0$.

Notation : On résumera le signe d'une fonction f à l'aide d'un tableau de signe. Ce tableau indique les intervalles où la fonction est positive (+), négative (-) ou nulle (0).

Exemple : Pour une fonction f négative sur $\mathbb{R}^-$, nulle en 0 et positive sur $\mathbb{R}^+$, le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

Propriété : Pour une fonction affine $f(x) = ax + b$, il n'y a que deux possibilités qui dépendent du signe de a :

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Notation : Une valeur interdite sera indiquée par une double barre verticale dans le tableau de signe.

Exemple : Pour la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	

Méthode : Si une fonction f s'exprime à partir de plusieurs fonctions dont on connait le signe, on peut déduire le signe de f du signe de ses composantes en appliquant la règle des signes.

Exemple : Déterminer le signe de la fonction f définie par $f(x) = (x-2)(-x-3)$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$				$-$	0	$+$	
$-x-3$		$+$	0		$-$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Remarque : Attention, des zéros dans des composantes peuvent devenir des valeurs interdites au dénominateur.

Exemple : Déterminer le signe de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^2}{5x+3}$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{5}$		0		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$5x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$+$	

Remarques :

- On ne peut déduire le signe à partir de celui des composantes **que** pour des produits et quotients, surtout pas pour des sommes et différences.
- Pour se ramener à des produits ou quotients, il est parfois nécessaire de factoriser ou de mettre au même dénominateur.

Exercices

Exercice 1 : Dresser les tableaux de signe des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x - 6$
2. $g(x) = -2x + 4$
3. $h(x) = -5x - 10$
4. $k(x) = 4x$

Exercice 2 : Dresser les tableaux de signe des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x-1)(x+2)$
2. $g(x) = (2x-3)(-x+4)$
3. $h(x) = (x+5)(x-2)(-x-1)$
4. $k(x) = (x-3)^2(x+1)$

Exercice 3 : Dresser les tableaux de signe des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$
2. $g(x) = \dfrac{-x+3}{2x+4}$
3. $h(x) = \dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(-x-3)}$
4. $k(x) = \dfrac{x^2-4}{(x-1)^2}$