FO 27 - Limites - Cas particuliers

Cours

Motivation : Les techniques vues précédemment ne suffisent pas toujours à déterminer les limites. Il peut être utile de garder en tête les cas particuliers suivants.

Cas particulier 1 : Lorsque l'on rencontre une forme indéterminée du type 0/0 dans une fraction rationnelle, cela signifie que l'on peut simplifier par un facteur du type $(x - a)$ pour lever l'indétermination.

Exemple : On cherche $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.
$\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = x + 2$ (pour $x \neq 2$).
Donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 2) = 4$.

Cas particulier 2 : Parfois avec les racines carrées, il peut être utile de multiplier et diviser par la quantité conjugée.

Exemple : On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 5x} - x$.
On multiplie et divise par la quantité conjugée :
$\sqrt{x^2 + 5x} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2 + 5x} - x)(\sqrt{x^2 + 5x} + x)}{\sqrt{x^2 + 5x} + x} = \dfrac{x^2 + 5x - x^2}{\sqrt{x^2 + 5x} + x} = \dfrac{5x}{\sqrt{x^2 + 5x} + x}$.
On divise par x au numérateur et au dénominateur :
$\dfrac{5x}{\sqrt{x^2 + 5x} + x} = \dfrac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1}$.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 5x} - x = \dfrac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1} = \dfrac{5}{2}$.

Remarque : Cette technique n'est nécessaire que lorsque les coefficients dominants sont du même degré, attention à ne pas en abuser.

Exemple : On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 5x - 1} - \sqrt{x}$.
$\sqrt{x^2 + 5x - 1} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\sqrt{x + 5 - \frac{1}{x}} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x + 5 - \frac{1}{x}} - 1\right)$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + 5 - \frac{1}{x}} = +\infty$.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 5x - 1} - \sqrt{x} = +\infty$.

Cas particulier 3 : Dans certains cas très particuliers, on peut chercher à reconnaitre la dérivée d'une fonction pour déterminer une limite.

Exemple : On cherche $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$.
Or, on reconnait la définition de la dérivée de la fonction sinus en 0.
Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$.

Exercices

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes en utilisant la technique de votre choix.

1. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
2. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$

Exercice 2 : Déterminer les limites suivantes en utilisant la technique de votre choix.

1. $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$
2. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x - 1} - \sqrt{x - 1}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes en utilisant la technique de votre choix.

1. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x + 1}$
2. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}$
3. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

Exercice 4 : Déterminer les limites suivantes en utilisant la technique de votre choix.

1. $\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$
2. $\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{2x^2 - x}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{x}$