

FO 26 - Limites - Croissance comparée

Cours

Propriété - Croissance comparée : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$.

Exemples :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \exp(x) = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \ln(x) = 0$

5. On cherche : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^2 - 1}$.

$$\frac{e^x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{\frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Or, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Donc par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = 1$.

Donc par quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^2 - 1} = +\infty$.

Remarques :

- La croissance comparée signifie que les fonctions exponentielles croissent plus vite que les fonctions polynomiales, qui elles-mêmes croissent plus vite que les fonctions logarithmiques.
- Lorsque l'on souhaite utiliser la croissance comparée, il faut que l'expression dans l'exponentielle et le polynôme soit la même.

Exemple :

On cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x+1}}{2x-5}$. On a : $\frac{e^{3x+1}}{2x-5} = \frac{e^{2x-5} e^{x+6}}{2x-5} = \frac{e^{2x-5}}{2x-5} \times e^{x+6}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 5 = +\infty$ et par croissance comparée, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

Donc par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x-5}}{2x-5} = +\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x+6} = +\infty$. Donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x+1}}{2x-5} = +\infty$.

Exercices

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes en utilisant la croissance comparée.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 e^x$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^5}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x)$

Exercice 2 : Déterminer les limites suivantes en utilisant la croissance comparée.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^5 \ln(x)$

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes en utilisant la croissance comparée.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x-1}}{3x+5}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 2x^2)e^x$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^4}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(3x)$

Exercice 4 : Déterminer les limites suivantes en utilisant la croissance comparée.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{4x+2}}{5x-3}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x)e^x$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x)}{x^2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \ln(2x)$