

FO 25 - Limites - Compositions

Cours

Propriété : Soient f et g deux fonctions. On cherche $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x))$.

Si :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$;
- $\lim_{X \rightarrow b} g(X) = L$.

Alors la fonction composée $g \circ f$ admet une limite en a et on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = L.$$

Exemples :

1. On cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1.$$

$$\text{Donc par composition : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

2. On cherche $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x}$

$$\text{Par somme : } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x = +\infty.$$

$$\text{De plus : } \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty.$$

$$\text{Donc par composition : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} = +\infty.$$

Remarques :

- Pour que la fonction composée existe, il faut veiller à ce que les images de f soient dans le domaine de définition de g .
- Parfois, il faudra combiner les méthodes vues précédemment (opérations, levé d'indétermination, théorème, composition ...) pour déterminer les limites intermédiaires.

Exemple : On cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} \right)$.

$$\frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = \frac{x^2(2 + \frac{3}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \frac{3}{x^2} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1.$$

$$\text{Donc par quotient : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2.$$

$$\text{De plus : } \lim_{X \rightarrow 2} \ln(X) = \ln(2).$$

$$\text{Donc par composition : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} \right) = \ln(2).$$

Exercices

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes en utilisant la composition.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-1}{x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 5x - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1)$

Exercice 2 : Déterminer les limites suivantes en utilisant la composition.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{x}}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin(x))$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2}$

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes en utilisant la composition.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{5x + 2}{x - 1}\right)$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-3x^2}{x^2 - 1}}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 4x - 5}$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 4x - 1)$

Exercice 4 : Déterminer les limites suivantes en utilisant la composition.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3}\right)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-5}{x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - x + 2}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 2x + 1)$