

# FO 24 - Limites - Gendarmes et comparaison

## Cours

**Motivation :** Certaines fonctions n'admettent pas de limites, mais composées avec d'autres, peuvent en admettre. Dans ces cas là, les opérations ne s'appliquent pas. On utilisera alors d'autres techniques pour déterminer les limites.

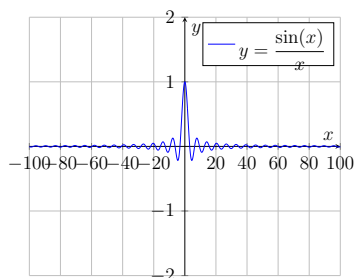
**Exemple :**

On cherche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ .

Le sinus étant périodique, il n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

Pourtant sur le graphique, on semble observer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$



**Théorème des gendarmes :** Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur un intervalle  $I$  contenant  $a$  (éventuellement au bord de  $I$ ). On suppose que :

- $\forall x \in I \setminus \{a\}, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  ;
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ .

Alors la fonction  $f$  admet une limite en  $a$  et on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

**Exemple :** On cherche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ .

On sait que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ .

Donc pour tout  $x > 0$ , on a :

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Or, on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

**Remarques :**

- Le théorème des gendarmes s'applique également pour les limites à droite et à gauche.
- Ce théorème ne s'applique que pour déterminer des limites finies.
- La difficulté consiste souvent à trouver les fonctions  $g$  et  $h$  adaptées et montrer l'encadrement.
- Pour déterminer des limites infinies, on utilisera les théorèmes de comparaison.

**Propriété :**  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$  et  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ .

**Théorèmes de comparaison :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  contenant  $a$  (éventuellement au bord de  $I$ ). On suppose que :

- Si  $\forall x \in I \setminus \{a\}, f(x) \geq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$   
Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .
- Si  $\forall x \in I \setminus \{a\}, f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$   
Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

**Exemple :** On cherche  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sin(x)$ .

On sait que pour tout  $x \in \mathbb{R}, \sin(x) \leq 1$ .

Donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$x + \sin(x) \leq x + 1.$$

Or, on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty.$$

Par le théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sin(x) = -\infty.$$

## Exercices

**Exercice 1 :** Déterminer les limites suivantes en utilisant le théorème des gendarmes.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \cos(x)}{x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x)$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos(x) + 3 \sin(x)}{x^2 + x}$

**Exercice 2 :** Déterminer les limites suivantes en utilisant les théorèmes de comparaison.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos(x)$
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \cos(x)$

**Exercice 3 :** Déterminer les limites suivantes en utilisant el théorème adapté.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \sin(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}$
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sin(x)$
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(x)e^x$