

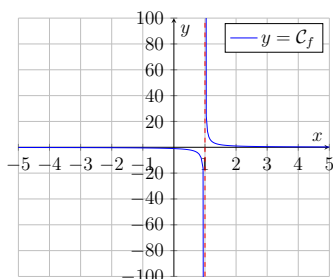
FO 23 - Limites - Interprétations graphiques

cadre : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

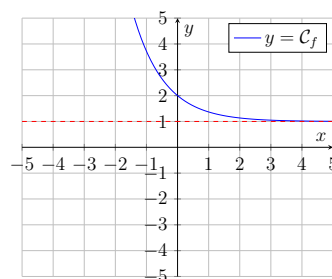
Définition : On dit qu'une droite est une asymptote à la courbe \mathcal{C}_f lorsque la distance entre la droite et la courbe tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou un réel a .

Graphiquement, cela signifie que si l'on zoom sur la courbe, celle-ci semble se confondre avec la droite.

Exemples :



La droite d'équation $x = 1$ semble être une asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f .



La droite d'équation $y = 1$ semble être une asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f .

Propriétés :

- La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$$

- La droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$$

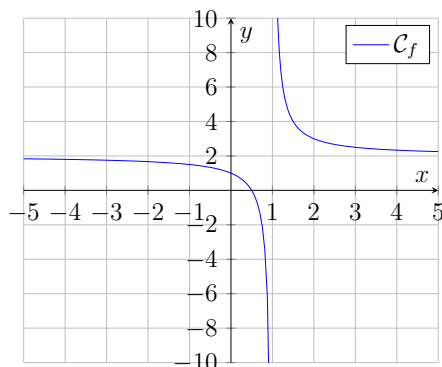
Exemples :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction inverse en $+\infty$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow$ La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de la fonction inverse en 0.
3. Soit $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow$ La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

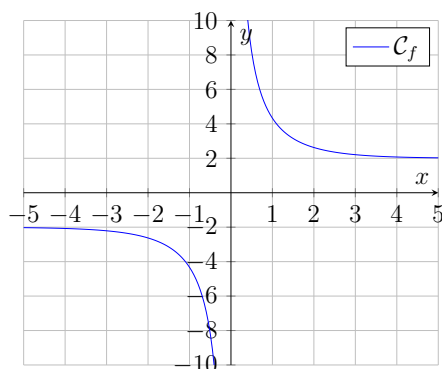
Remarque : La plupart du temps, quand un énoncé demande d'interpréter graphiquement une limite, il s'agit de déterminer une asymptote.

Exercices

Exercice 1 : Conjecturer graphiquement les asymptotes de la courbe suivante :



Exercice 2 : Conjecturer graphiquement les asymptotes de la courbe suivante :



Exercice 3 : Rappeler puis interpréter graphiquement les limites usuelles suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$

Exercice 4 : Déterminer puis interpréter graphiquement les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{x-5}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{5x^2+3}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{x-1}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \ln(x)$

Exercice 5 : Déterminer puis interpréter graphiquement les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2+3x-1}{2x^2-x+4}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+4}{2x^3+x+1}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{2x}+1}{e^x-1}$