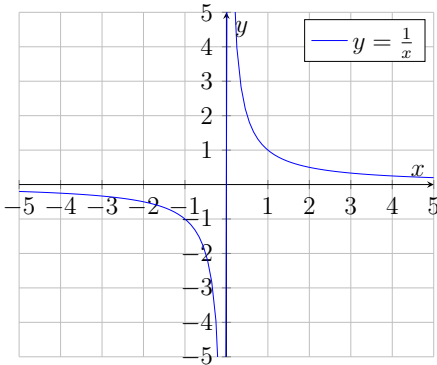


FO 22 - Limites en un réel

Cours

cadre : Soit $a \in D_f$ ou éventuellement au bord de D_f .

Remarque :



On remarque que les comportements à gauche de 0 et à droite de 0 semblent différents pour la fonction inverse.

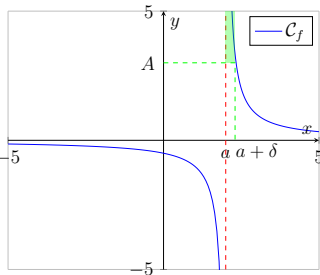
Définitions : On note la limite à droite en a $\lim_{x \rightarrow a^+}$ (ou $\lim_{x > a}$) et la limite à gauche en a $\lim_{x \rightarrow a^-}$ (ou $\lim_{x < a}$).

Si les limites à droite et à gauche existent et sont égales, on dit que la fonction admet une limite en a et on note $\lim_{x \rightarrow a}$.

Exemple : Pour la fonction inverse, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. La fonction n'admet donc pas de limite en 0.

Définitions - Limites infinies en un réel :

1. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$:



• Définition mathématique :

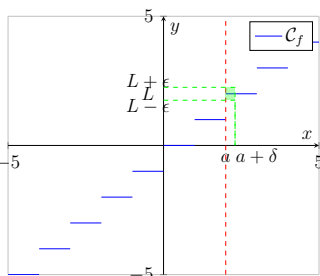
$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) \geq A$$

• Interprétation :

Peu importe la valeur A choisie, il existe un petit intervalle à droite de a dans lequel toutes les images de la fonction seront supérieures à A .

2. On définirait de même : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$:



• Définition mathématique :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

• Interprétation :

Peu importe l'écart ε choisie, il existe un petit intervalle à droite de a dans lequel toutes les images de la fonction sont à une distance inférieure ou égale à ε de L (aussi proche que l'on veut).

4. On définirait de même : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

Propriété : On dit que la fonction f admet une limite en a si les limites à droite et à gauche existent et sont égales. On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Définition : Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et $f(a) = L$, on dit que la fonction f est continue en a . On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout a de I .

Conséquence : Si une fonction est continue en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Propriété : Si une fonction est dérivable en a , alors elle est continue en a .

Remarque : Graphiquement, la continuité d'une fonction se traduit par le fait que l'on peut tracer la courbe représentative de la fonction sans lever le crayon.

Propriétés :

1. En tout point de dérivabilité a d'une fonction f , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$.
4. Les opérations sur les limites vues précédemment s'appliquent également pour les limites en un réel.

Méthode : Dans les opérations sur les limites, on a souvent besoin de déterminer le signe d'une fonction en un point proche de a . Pour cela, on peut utiliser le tableau de signes de la fonction.

Exemple : On cherche $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2}$.

— On cherche le signe de $x - 2$ près de 2. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	$-$	0	$+$

Donc près de 2 à droite, $x - 2 > 0$.

— On calcule les limites séparément : $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3x - 1) = 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 11 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0^+$.

— Par quotient, on a donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2} = +\infty$.

Exercices

Exercice 1 : Déterminer la limite (ou les limites à droite et à gauche) des fonctions suivantes en a .

1. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ en $a = 2$
2. $g(x) = \frac{-x^2 + x - 6}{x - 3}$ en $a = 3$
3. $h(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$ en $a = 1$
4. $i(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x}}$ en $a = 0$
5. $j(x) = \frac{5x + 2}{x + 1}$ en $a = -1$
6. $k(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $a = 2$

Exercice 2 : Déterminer la limite (ou les limites à droite et à gauche) des fonctions suivantes en a .

1. $f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{x - 1}$ en $a = 0$
2. $g(x) = e^x \ln(x)$ en $a = 0$
3. $h(x) = \frac{x^2 - 6}{x - 2}$ en $a = 2$
4. $i(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ en $a = 4$
5. $j(x) = \frac{2x + 3}{x - 3}$ en $a = 3$
6. $k(x) = x^2 - 2x + 1$ en $a = 9$