FO 21 - Opérations sur les limites

Cours

Méthode : Comme indiqué dans la fiche précédente, plutôt que d'utiliser la définition pour détemriner les limites, on combinera des limites usuelles connues.

cadre :

1. a désigne $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$;
2. $l, l' \in \mathbb{R}$;
3. Pour les produits et quotients : ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$; 0 désigne 0^+ ou 0^- ; il faut prendre en considération le signe de l et l' puis appliquer la règle des signes.
4. FI désigne une forme indéterminée, on ne peut pas directement déterminer la limite par opérations.

- Limite d'une somme :

Si $lim_{x\to a}f(x)$ =...	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $lim_{x\to a}g(x)$ =...	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ =...	l+l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

- Limite d'un produit :

Si $lim_{x\to a}f(x)$ =...	l	$l \neq 0$	∞	0
Si $lim_{x\to a}g(x)$ =...	l'	∞	∞	∞
Alors $lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))$ =...	$l \times l'$	∞	∞	FI

- Limite d'un quotient :

Si $lim_{x\to a}f(x)$ =...	l	$l \neq 0$	l	∞	∞	0
Si $lim_{x\to a}g(x)$ =...	$l' \neq 0$	0	∞	l'	∞	0
Alors $lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ =...	$\frac{l}{l'}$	∞	0	∞	FI	FI

Exemples :

1. On cherche $lim_{x\to+\infty}x^2 + \frac{1}{x}$.
   $lim_{x\to+\infty}x^2 = +\infty$, $lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$. Par somme : $lim_{x\to+\infty}x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$.
2. On cherche $lim_{x\to+\infty}x^2(1 - \frac{1}{x})$.
   $lim_{x\to+\infty}x^2 = +\infty$, $lim_{x\to+\infty}1 - \frac{1}{x} = 1$. Par produit : $lim_{x\to+\infty}x^2(1 - \frac{1}{x}) = +\infty$.
3. On cherche $lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{5}{x}}$.
   $lim_{x\to+\infty}1 + \frac{1}{x} = 1$, $lim_{x\to+\infty}2 - \frac{5}{x} = 2$. Par quotient : $lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{5}{x}} = \frac{1}{2}$.

Méthode : Une méthode qui fonctionne souvent pour lever une indétermination est la factorisation.

Exemples :

1. On cherche $lim_{x\to+\infty}2x^2-x$.
   C'est une forme indéterminée de la forme $+\infty-(+\infty)$.
   On factorise : $2x^2-x=x(2x-1)$.
   $lim_{x\to+\infty}x=+\infty$, $lim_{x\to+\infty}2x-1=+\infty$.
   Par produit : $lim_{x\to+\infty}2x^2-x=+\infty$.
2. On cherche $lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x}{2x^2-x+4}$.
   C'est une forme indéterminée de la forme $\frac{+\infty}{+\infty}$.
   On factorise par x^2 au numérateur et au dénominateur : $\frac{x^2(1+\frac{3}{x})}{x^2(2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2})}=\frac{1+\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}$.
   $lim_{x\to+\infty}1+\frac{3}{x}=1$, $lim_{x\to+\infty}2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}=2$.
   Par quotient : $lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x}{2x^2-x+4}=\frac{1}{2}$.

Exercices

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2+2x+1)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-x^2+4)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3}{4x^2-x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3-2x}{-6x^3+x^2+5}$

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-4x+7)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2+x-3)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+2x-1}{3x^2+4}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^3+x}{2x^3-5x^2+1}$

Exercice 3 : Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^3-x^2+2)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x+1)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-x+5}{x^3+4x^2-1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+x-2}{-3x^2+5x+4}$

Exercice 4 : Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}-x\sqrt{x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^4-x^3+1)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4+x^2-2}{2x^4-x+5}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$

Exercice 5 : Conjecturer graphiquement les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$