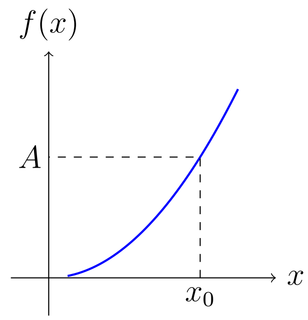
FO 20 - Limites à l'infini

Cours

Remarque : Cette fiche est une fiche de définition pour comprendre les notations de limites. En pratique, on ne servira que très rarement de ces définitions pour calculer des limites.

Définitions - Limites infinies à l'infini :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$:

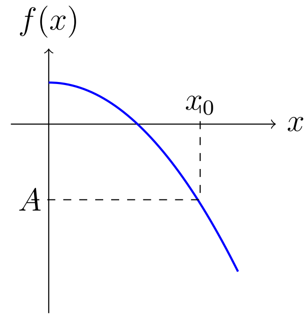


- Définition mathématique :

$$\forall A > 0, \exists x_0 \in D_f, x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A$$

- Interprétation :
Peu importe la valeur A choisie, il existe un moment à partir duquel toutes les images de la fonction seront supérieures à A.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$:

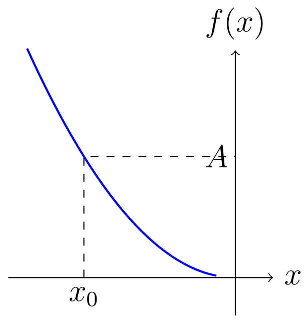


- Définition mathématique :

$$\forall A < 0, \exists x_0 \in D_f, x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \leq A$$

- Interprétation :
Peu importe la valeur A choisie, il existe un moment à partir duquel toutes les images de la fonction seront inférieures à A.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$:

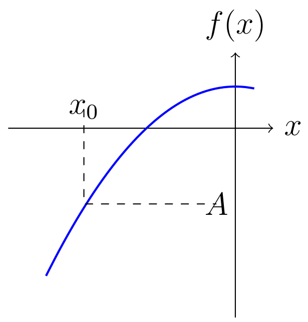


- Définition mathématique :

$$\forall A > 0, \exists x_0 \in D_f, x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A$$

- Interprétation :
Peu importe la valeur A choisie, il existe un moment avant lequel toutes les images de la fonction sont supérieures à A.

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$:



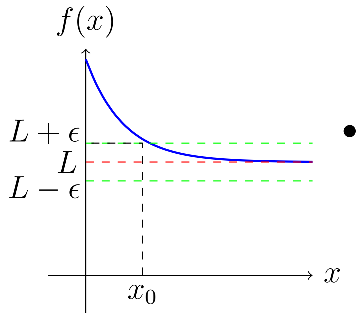
- Définition mathématique :

$$\forall A < 0, \exists x_0 \in D_f, x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq A$$

- Interprétation :
Peu importe la valeur A choisie, il existe un moment avant lequel toutes les images de la fonction sont inférieures à A.

Définition - Limites finies à l'infini : Soit $L \in \mathbb{R}$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$:

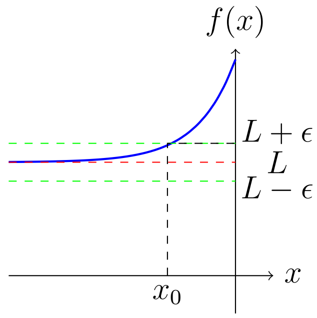


- Définition mathématique :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in D_f, x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

- Interprétation :
Peu importe l'écart ε choisie, il existe un moment à partir duquel toutes les images de la fonction sont à une distance inférieure ou égale à ε de L (aussi proche que l'on veut).

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$:



- Définition mathématique :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in D_f, x \leq x_0 \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

- Interprétation :
Peu importe l'écart ε choisie, il existe un moment avant lequel toutes les images de la fonction seront à une distance inférieure ou égale à ε de L (aussi proche que l'on veut).

Propriétés - Limites usuelles : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
8. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ si n est impair.
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
10. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
11. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Remarque : Les propriétés 1 à 4 sont des cas particuliers des propriétés 7 à 9 lorsque $n = 1$ ou $n = 2$.

Exercices optionnels :

1. Retrouver graphiquement les limites précédentes.
2. Démontrer les propriétés 1 à 6.