FO 19 - Composition de fonctions

Cours

Définition : Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D_f) \subset D_g$. On définit la fonction composée $g \circ f$ par :

$$\forall x \in D_f, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Le domaine de définition de $g \circ f$ est $D_{g \circ f} = D_f$.

Exemple : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$.
On a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ donc $g \circ f$ est définie.
$\forall x \in \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$.
Le domaine de définition de $g \circ f$ est $\mathbb{R}$.

Propriété - Dérivation : Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D_f) \subset D_g$. Si f est dérivable en $x \in D_f$ et si g est dérivable en $f(x) \in D_g$ alors $g \circ f$ est dérivable en x et :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Exemple : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^3$.
On a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ donc $g \circ f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x - 1) = (x^2 - 2x - 1)^3$.
On a $f'(x) = 2x - 2$ et $g'(x) = 3x^2$. Donc :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = (2x - 2) \times 3(x^2 - 2x - 1)^2 = 3(2x - 2)(x^2 - 2x - 1)^2.$$

Remarque : Les domaines ne sont pas toujours bien imbriqués. Il faut alors les déterminer.

Exemples :

1. Soit $f(x) = \ln(2x - 1)$. f est définie et dérivable pour $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Donc $D_f = D_{f'} =]\frac{1}{2}; +\infty[$.
2. Soit $g(x) = \sqrt{5 - x}$. g est définie pour $5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$ et dérivable pour $5 - x > 0 \Leftrightarrow x < 5$. Donc $D_g =]-\infty; 5]$ et $D_{g'} =]-\infty; 5[$.

Méthode : En pratique, on connaitra les formules pour les compositions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$[u(x)]^n$	$nu'(x)[u(x)]^{n-1}$
$\cos(u(x))$	$-u'(x) \times \sin(u(x))$
$\sin(u(x))$	$u'(x) \times \cos(u(x))$

Exercices

Exercice 1 : On considère les compositions suivantes. Proposer deux fonctions u et v telles que :

1. $(u \circ v)(x) = e^{3x+2}$
2. $(u \circ v)(x) = \ln(-x^2 + 4x - 1)$
3. $(u \circ v)(x) = \left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^3$

Exercice 2 : Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{2x+1}$ et $g(x) = \ln(x-3)$.
Déterminer l'expression de la fonction composée $f \circ g$ et son domaine de définition.

Exercice 3 : Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ et $g(x) = e^{x+1}$.
Déterminer l'expression de la fonction composée $g \circ f$ et son domaine de définition.

Exercice 4 : Après avoir étudié leurs domaines, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
2. $g(x) = e^{3x^2-2x}$
3. $h(x) = \ln(x^3 - 2x + 1)$

Exercice 5 : Après avoir étudié leurs domaines, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$
2. $g(x) = e^{\ln(x+1)}$
3. $h(x) = \ln(\sqrt{5x^2+1})$

Exercice 6 : Après avoir étudié leurs domaines, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$
2. $g(x) = \exp\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)$
3. $h(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}\right)$

Exercice 7 : Après avoir étudié leurs domaines, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x^2 - 5x + 1)^4$
2. $g(x) = (5x-3)(x^2+1)^5$
3. $h(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2)^3}$

Exercice 8 : Après avoir étudié leurs domaines, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(5x^2 - 2x - 1)$
2. $g(x) = \exp(\sin(x^2))$
3. $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$