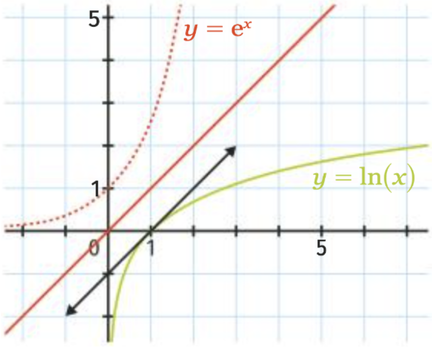
FO 18 - Le logarithme népérien

Cours

Définition : La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel $a > 0$ associe l'unique solution de l'équation $e^x = a$.
Autrement dit : $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$.
On dit que le logarithme est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.



Remarque : Les représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme sont symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Propriétés :

- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
- $\forall x \in]0;+\infty[, e^{\ln(x)} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$.

Application - résolution d'équations :

1. $e^x = 5 \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(5) \Leftrightarrow x = \ln(5)$. Donc $S = \{\ln(5)\}$.
2. $\ln(x) = -2 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{-2} \Leftrightarrow x = e^{-2}$. Donc $S = \{e^{-2}\}$.
3. $\ln(3x-6) = \ln(12+x)$.
   Equation définie pour $3x - 6 > 0$ et $12 + x > 0$, c'est à dire sur $]2;+\infty[$.
   $\forall x \in]2;+\infty[, \ln(3x-6) = \ln(12+x) \Leftrightarrow 3x - 6 = 12 + x \Leftrightarrow x = 9$.
   $x \in]2;+\infty[$ donc $S = \{9\}$.

Propriétés : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Application - Résolution d'inéquations :

1. $e^{5x} \leq 2 \Leftrightarrow \ln(e^{5x}) \leq \ln(2) \Leftrightarrow 5x \leq \ln(2) \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{5}\ln(2)$. Donc : $S =]-\infty; \frac{1}{5}\ln(2)[$.
2. $\ln(3x+1) > 0$.
   Définie pour $3x + 1 > 0$ donc sur $]\frac{-1}{3};+\infty[$.
   $\forall x \in]\frac{-1}{3};+\infty[$, $\ln(3x+1) > 0 \Leftrightarrow \exp(\ln(3x+1)) > \exp(0) \Leftrightarrow 3x+1 > e^0 \Leftrightarrow 3x+1 > 1 \Leftrightarrow x > 0$.
   $S =]\frac{-1}{3};+\infty[\cap]0;+\infty[=]0;+\infty[$.
3. $\ln(2x) \leq \ln(6-x)$.
   Définie pour $2x > 0$ et $6 - x > 0$ donc sur $]0;6[$.
   $\forall x \in]0;6[$, $\ln(2x) \leq \ln(6-x) \Leftrightarrow e^{\ln(2x)} \leq e^{\ln(6-x)} \Leftrightarrow 2x \leq 6 - x \Leftrightarrow x \leq 2$.
   Donc $S =]0;6[\cap]-\infty;2] =]0;2]$.

Propriétés :

- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.
- $\forall x > 0, \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- $\ln(u)' = \dfrac{u'}{u}$. C'est à dire : $\forall x \in D_{u'}$ tel que $u(x) > 0$, $(\ln(u(x)))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+1)$.
$x \mapsto x^2+1$ est définie, dérivable et à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Propriétés : Soit $a > 0$, $b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On a les formules suivantes :

1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
3. $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
4. $\ln(a^n) = n\ln(a)$
5. $\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$
6. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Exemples : $\forall x > 0, \ln(x^4) = 4\ln(x)$ et $\ln(2\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x) + \ln(2)$.

Application - résolution d'inéquation où l'inconnue est en puissance :
Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $2^n > 70$:
le logarithme étant strictement croissant sur $]0;+\infty[$ on a :
$2^n > 70 \Leftrightarrow \ln(2^n) > \ln(70) \Leftrightarrow n\ln(2) > \ln(70) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(70)}{\ln(2)}$ (car $\ln(2) > 0$).
Or : $\frac{\ln(70)}{\ln(2)} \simeq 6.13$.
Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 7.

Exercices

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes :
1) $e^{x+2} = 10$ 2) $\ln(x-1) = 3$ 3) $\ln(2x+3) = \ln(5x-1)$

Exercice 2 : Résoudre les inéquations suivantes :
1) $e^{3x-1} < 5$ 2) $\ln(x+4) \geq 0$ 3) $\ln(4x-2) < \ln(2x+6)$

Exercice 3 : Après avoir déterminer leurs domaines, étudier les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x^2+2)$
2. $g(x) = \ln(5x-1)$
3. $h(x) = \ln\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)$

Exercice 4 : Simplifier les expressions suivantes :
$\mathrm{A} = \ln(e^{4x+2})$ $\mathrm{B} = \ln(e^{3x}) - \ln(e^{x-1})$ $\mathrm{C} = \ln(x^2-2x+1)$ $\mathrm{D} = \ln(256)$

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{N}$ les inéquations suivantes :
1) $3^n > 50$ 2) $5^n \leq 200$ 3) $2^{2n-1} < 1000$