FO 17 - La fonction exponentielle

Cours

Définition : Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On dit que f est une solution de l'équation différentielle $y' = y$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$.

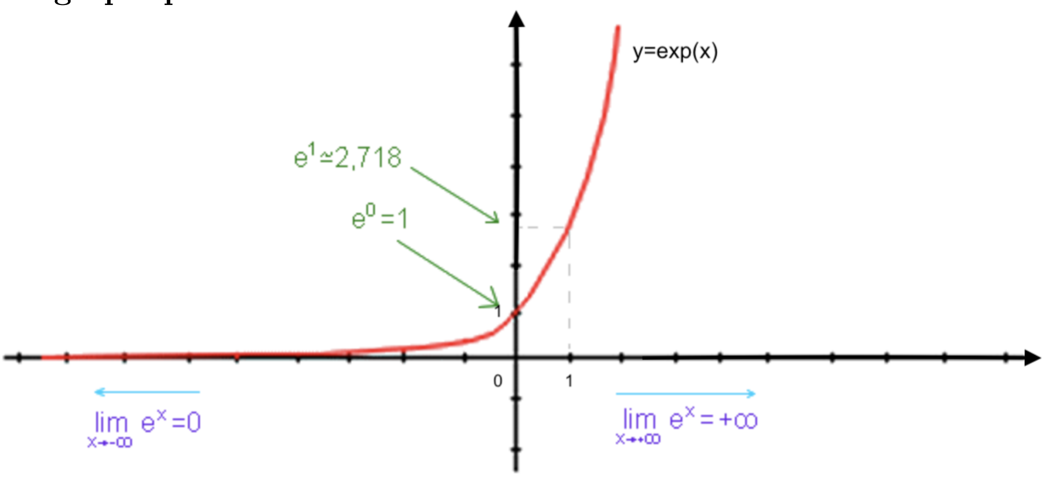
Propriété - Définition : Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle :

$$\begin{array}{rcl} exp : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & exp(x) \end{array}$$

Remarque : On a donc $exp(0) = 1$.

Définition : On note $exp(1) = e$. Ce nombre e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper.

Représentation graphique :



Théorème (admis) : $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) = e^x$.

Propriétés (relations fonctionnelles) : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:
i. $e^{x+y} = e^x \times e^y$ ii. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ iii. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ iv. $e^{x^n} = e^{nx}$

Application : $\dfrac{(e^{-x^2+2x})^2}{e^{3x+2}} = \dfrac{e^{-2x^2+4x}}{e^{3x+2}} = e^{-2x^2+4x-(3x+2)} = e^{-2x^2+x-2}$.

Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Application :

1. Résolution d'équation :
   $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
   exemple : $e^{2x+1} = e^{-3x+2} \Leftrightarrow 2x + 1 = -3x + 2 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$.

2. Résolution d'inéquation :
   $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y$ (de même pour $\leq$, $<$ et $>$)
   exemple : $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, +\infty[$.

Propriété - Dérivation : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

- $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$;
- $(e^u)' = u' \times e^u$. C'est à dire : $\forall x \in D_{u'}, (e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$.

Exemple - étude de variations : Soit f la fonction définie par $f(x) = (-x+3)e^{2x-1}$.
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$. On a :

$$f'(x) = (-1)e^{2x-1} + (-x+3) \cdot 2e^{2x-1} = (-1 + 2(-x+3))e^{2x-1} = (-2x+5)e^{2x-1}.$$

On étudie le signe de $f'(x)$:

- Valeur d'intérêt pour les tableaux : $-2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.
- Signe et variations :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de e^{2x-1}			$+$		
signe de $-2x+5$		$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$\frac{9}{2}e^4$	$\searrow$	

Exercices

Exercice 1 : Simplifier les expressions suivantes :
$\text{A} = \dfrac{(e^{3x+2})^2}{e^{4x-1}}$ $\qquad$ $\text{B} = \dfrac{e^{2x-3} \times e^{x+5}}{e^{x-1}}$ $\qquad$ $\text{C} = \dfrac{e^{4x} \times e^{2x}}{(e^{3x})^3}$

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes :
1) $e^{2x+1} = e^{3x-2}$ $\qquad$ 2) $e^{x^2-4} = 1$ $\qquad$ 3) $e^{3x^2-2x+1} = e^{2x}$

Exercice 3 : Résoudre les inéquations suivantes :

1. $e^{-x-5} \geq 0$
2. $e^{2x+1} < e^{x-2}$
3. $e^{x^2-2x+3} \leq e^{5x-1}$

Exercice 4 : Étudier les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x-2)e^{x+1}$
2. $g(x) = (3x+1)e^{-2x}$
3. $h(x) = (x^2+x-4)e^{2x-1}$