

FO 16 - Fonctions trigonométriques et périodicité

Cours

Objectif : Dans cette fiche, nous étendons la définition vue en géométrie des cosinus et sinus à des fonctions définies sur \mathbb{R} .

Définition : On définit les fonctions cosinus et sinus de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{array}$$

Propriétés : Quelques valeurs à connaître (à noter que la variable x est exprimée en radians) :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Remarque : On peut ensuite étendre ces valeurs à d'autres angles grâce au cercle trigonométrique (voir fiche trigonométrie en calcul numérique).

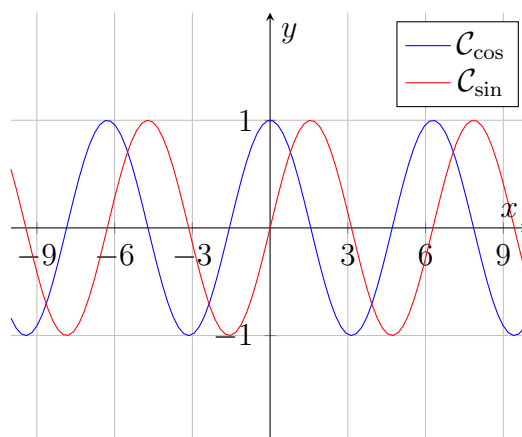
Définition : On dit qu'une fonction f est périodique si il existe une période $T \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in D_f, f(x + T) = f(x)$.

Périodicité : Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x), \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

Remarque : Connaître ces fonctions sur un intervalle de taille 2π suffit pour les connaître entièrement. On se limitera donc souvent à l'étude de ces fonctions sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$.

Représentation graphique :



Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$;
- Le cosinus est pair et le sinus impair : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$;
On pourra se limiter à l'étude de ces fonctions sur $[0; +\pi]$ puis étendre par symétrie puis périodicité.

Propriétés - Dérivation : Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur \mathbb{R} et :

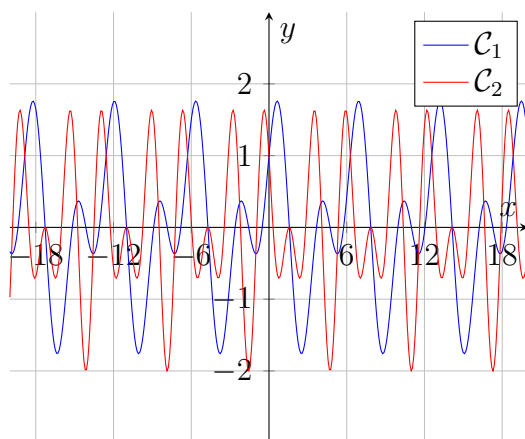
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\cos(x))' = -\sin(x)$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\sin(x))' = \cos(x)$;
- Soit u une fonction dérivable Alors : $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$ et $(\sin(u))' = u' \cos(u)$.

Exercices

Exercice 1 : En vous servant de la représentation graphique et des valeurs données dans le cours :

1. Construire le tableau de signe des fonctions cos et sin sur $[0; \pi]$;
2. En déduire les variations de ces fonctions sur $[0; \pi]$;
3. Etendre ces résultats à $[-\pi; \pi]$ grâce à la parité de ces fonctions.

Exercice 2 : Déterminer graphiquement la périodicité des fonctions suivantes .



Exercice 3 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(2x)$.

1. Vérifier que f est 2π -périodique ;
2. Vérifier que f est π -périodique ;
3. Vérifier que f n'est pas $\frac{\pi}{2}$ -périodique.
4. On admet que f est π -périodique. Conjecturer la période des fonctions suivantes :
 - (a) $g(x) = \cos(3x)$
 - (b) $h(x) = \sin(4x)$
 - (c) $k(x) = \cos(2x + 1)$

Exercice 4 :

Soit f définie par $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$.

1. Vérifier que f est π -périodique ;
2. Soit $X = 2x + \frac{\pi}{4}$.
 - (a) Vérifier que :
 $x \in [0; 2\pi] \Leftrightarrow X \in [\frac{\pi}{4}; 4\pi + \frac{\pi}{4}]$;
 - (b) Construire le tableau de signe de $f(X)$ sur $[\frac{\pi}{4}; 4\pi + \frac{\pi}{4}]$;
 - (c) En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0; 2\pi]$;

Exercice 5 :

Soit f définie par $f(x) = \sin(3x - 1)$.

1. Vérifier que f est $\frac{2\pi}{3}$ -périodique ;
2. Déterminer la dérivée f' de f .
3. En utilisant le changement de variable $X = 3x - 1$, déterminer le signe de f' sur $[0; 2\pi/3]$.
4. En déduire les variations de f sur $[0; 2\pi/3]$.
5. Tracer C_f sur $[0; 2\pi/3]$.