FO 15 - Dérivée et variations

Cours

Propriété : Si elle est dérivable, on peut déduire les variations d'une fonction du signe de sa dérivée.

- Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Méthode : Pour étudier les variations d'une fonction, on respecte les étapes suivantes :

1. Déterminer son domaine de définition D_f et de dérivabilité $D_{f'}$;
2. Déterminer sa fonction dérivée f' ;
3. Étudier le signe de f' sur $D_{f'}$;
4. En déduire les variations de f sur $D_{f'}$.

Exemples :

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
   (a) Domaines : $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$.
   (b) Fonction dérivée : $f'(x) = 2x - 2$.
   (c) Recherche des valeurs d'intérêt : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	2	$\nearrow$	

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{-3x+1}{x+2}$.
   (a) Domaines : $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. Donc : $D_g = D_{g'} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
   (b) Fonction dérivée : $g'(x) = \dfrac{-3(x+2) - (-3x+1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{-6+3}{(x+2)^2} = \dfrac{-3}{(x+2)^2}$.
   (c) Pas d'autre valeur d'intérêt que $x = -2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
Variations de g		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Méthode : On peut également construire le tableau sur un domaine restreint puis étudier les extrêmes.

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[-3; 3]$.

1. Domaines : $D_f = D_{f'} = [-3; 3]$.
2. Fonction dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

3. Recherche des valeurs d'intérêt : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	-3		-1		1		3
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-17	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	19

4. Extremums :

Extremum	Nature	Valeur	Atteint en
Minimum	Local	-1	$x = 1$
Maximum	Local	3	$x = -1$
Minimum	Global	-17	$x = -3$
Maximum	Global	19	$x = 3$

Exercices

Exercice 1 : Étudier les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 4x + 5$
2. $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$
3. $h(x) = \sqrt{x+2}$

Exercice 2 : Étudier les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
2. $g(x) = \dfrac{-x^2+4}{x+1}$
3. $h(x) = \sqrt{4-x}$

Exercice 3 : Étudier les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6$
2. $g(x) = \dfrac{3x^2+2x+1}{x-2}$
3. $h(x) = \sqrt{2x^2 - 4x + 5}$

Exercice 4 : On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ sur $[-1; 5]$. Étudier les variations de f et déterminer ses extremums.

Exercice 5 : On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 1}$ sur $[2; 6]$. Étudier les variations de g et déterminer ses extremums.