FO 14 - Dérivée - Formulaire 2

Cours

Remarques :

- En pratique, on calcule (très) rarement la dérivée avec la définition (FO11) ;
- On apprend par coeur les dérivées des fonctions usuelles, puis l'on apprend comment se dérivent les fonctions construites par opérations sur les fonctions usuelles ;
- Il est donc essentiel de connaitre les dérivées des fonctions usuelles, ainsi que les formules de dérivation.

Formulaire - Rappel :

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^*_+$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Formulaire - Opérations : Soit $k \in \mathbb{R}$, u et v deux fonctions, D_u, D_v, $D_{u'}$ et $D_{v'}$ leurs domaines de définition et de dérivabilité respectifs.

Fonction	ku	$u+v$	uv	u^n	$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	$\cos(u)$	$\sin(u)$
Dérivée	ku'	$u'+v'$	$u'v+uv'$	$nu^{n-1}u'$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$-u' \times \sin(u)$	$u' \times \cos(u)$

Remarque : Attention, $\dfrac{1}{u}$ n'est pas définie pour les x tels que $u(x) = 0$ et $\dfrac{u}{v}$ n'est pas définie pour les x tels que $v(x) = 0$. La fonction $\sqrt{u}$, quant à elle n'est définie que pour $u(x) \geq 0$ et dérivable pour $u(x) > 0$.

Exemples :

1. $f(x) = 5x + 4$. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$. On a $f'(x) = 5 \cdot 1 + 0 = 5$.
2. $g(x) = x^3 - 3x + 2$. $D_g = D_{g'} = \mathbb{R}$. On a $g'(x) = 3x^2 - 3$.
3. $h(x) = (x^2 + 1)(x - 3)$. $D_h = D_{h'} = \mathbb{R}$. On a $h'(x) = 2x(x - 3) + (x^2 + 1) \cdot 1 = 3x^2 - 6x + 1$.
4. $k(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$. Définie pour $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$. $D_k = D_{k'} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. On a :
   $k'(x) = \dfrac{2x(x-3) - (x^2+1) \cdot 1}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x - 1}{(x-3)^2}$.
5. $m(x) = \sqrt{2x + 4}$. Définie pour $2x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$. Dérivable pour $2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.
   Donc : $D_m = [-2; +\infty[$ et $D_{m'} =]-2; +\infty[$. On a :
   $m'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$.

Exercices

Exercice 1 : Après avoir étudier leurs domaines, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 7x^3 - 2x + 5$
2. $g(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{2x - 4}$
3. $h(x) = \sqrt{5x - 10}$

Exercice 2 : Après avoir étudier leurs domaines, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$
2. $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 2}$
3. $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

Exercice 3 : Après avoir étudier leurs domaines, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x^2 - 1)^3$
2. $g(x) = 6x^2 - 4x + 1$
3. $h(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 1}$

Exercice 4 : Après avoir étudier leurs domaines, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (3x - 2)(x^2 + 1)$
2. $g(x) = 8x^4 - 2x^2 + 3x - 1$
3. $h(x) = \sqrt{4x - x^2}$

Exercice 5 : Après avoir étudier leurs domaines, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$
2. $g(x) = \dfrac{5x - 3}{x^2 + 1}$
3. $h(x) = \sqrt{2x^2 + 3x}$

Exercice 6 : Après avoir étudier leurs domaines, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x^2 - 2x + 4)^4$
2. $g(x) = 5x^2 - 2x + 1 - \dfrac{1}{x}$
3. $h(x) = \sqrt{-x + 5}$

Exercice 7 : Après avoir étudier leurs domaines, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(x^2 - 2x + 1)$
2. $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$
3. $h(x) = sin^2(5x - 1)$