FO 13 - Dérivée - Formulaire 1

Cours

Remarque :

- Le taux d'accroissement de f en a peut aussi s'écrire :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- La dérivée de f en a (si elle existe) peut donc aussi s'écrire :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- Plutôt que de calculer la dérivée en un point, on cherche souvent à déterminer la fonction dérivée f' définie par

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

.

Propriété : Soit $f(x) = x^2$. La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.

Démonstration : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

Propriété : Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Démonstration : Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Remarques :

- Le domaine de définition de la dérivée se nomme domaine de dérivabilité. On le notera D'_f.
- Le domaine de dérivabilité ne peut pas dépasser le domaine de définition. On a donc $D'_f \subseteq D_f$.
- Le domaine de dérivabilité peut en revanche être plus petit que le Domaine de définition.

Exemples : Soit $f(x) = \sqrt{x}$ avec $D_f = \mathbb{R}^+$. On calcule le taux d'accroissement de f en un point x quelconque :

$$\tau_x(h) = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$

On en déduit que pour $x > 0$:

$$\lim_{h \to 0} \tau_x(h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On en déduit que $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Formulaire :

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = \|x\|$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$\forall n \in \mathbb{N}^* f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$

Exercices

Exercice 1 : En vous inspirant des exemples vus dans le cours et sans utiliser le formulaire, déterminer la fonction dérivée et le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = k$ (où k est une constante)
2. $g(x) = ax + b$ (où a et b sont des constantes non nulles)
3. $h(x) = |x|$

Exercice 2 : En vous inspirant des exemples vus dans le cours et sans utiliser le formulaire, déterminer la fonction dérivée et le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $k(x) = x^3$
2. $m(x) = x^n$ (où n est un entier naturel non nul)

Exercice 3 : En vous inspirant des exemples vus dans le cours, déterminer la fonction dérivée et le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5$
2. $g(x) = -3x + 4$
3. $h(x) = x^3 - 2x + 1$