

# FO 12 - Dérivée

## Cours

**Notation :** La notation  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  désigne la valeur vers laquelle  $f(x)$  se rapproche quand  $x$  se rapproche de  $a$ .

**Exemples :**

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x - 3} = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 - 3} = -\frac{1}{3}$

**Remarque :** Le cas où la limite n'est pas un réel dépasse le cadre de cette fiche. Nous le verrons plus tard.

**Définition :** Soit  $f$  une fonction. On appelle taux d'accroissement de  $f$  en  $a$  et on note  $\tau_a$  la fonction définie par :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

**Définition :** Soit  $f$  une fonction et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative. La fonction  $f$  est dite **dérivable** en un point  $a$  de son domaine de définition si le taux d'accroissement de  $f$  en  $a$  admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $a$ . Cette limite est appelée la **dérivée** de  $f$  en  $a$  et se note  $f'(a)$ .

**Exemples :**

1. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^2$ . Calculer la dérivée de  $f$  en  $a = 1$ .

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 = f'(1)$$

Donc la dérivée de  $f$  en 1 est 2.

2. Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Calculer la dérivée de  $g$  en  $a = 2$ .

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2 - x}{2x}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 2)}{2x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4} = g'(2)$$

Donc la dérivée de  $g$  en 2 est  $-\frac{1}{4}$ .

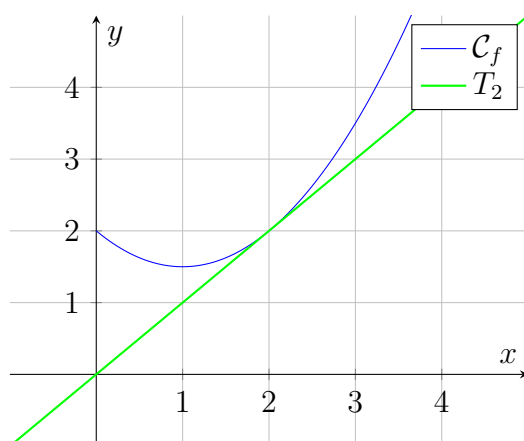
**Remarques :**

- Lorsqu'elle existe, la dérivée d'une fonction en un point  $a$  peut être interprétée comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction au point d'abscisse  $a$ .
- L'équation de cette tangente est alors :

$$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- Lorsque la dérivée n'existe pas, cela se traduit souvent par un angle sur la courbe représentative.

**Exemple :** On considère la courbe représentative de la fonction  $f$  ci-dessous.



On voit graphiquement que la tangente au point d'abscisse 2 est la droite d'équation  $T_2 : y = x$ . On en déduit que  $f'(2) = 1$  (le coefficient directeur de  $T_2$ ).

## Exercices

**Exercice 1 :** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 2x - 1$ . Calculer la dérivée de  $f$  en  $a = 1$ .

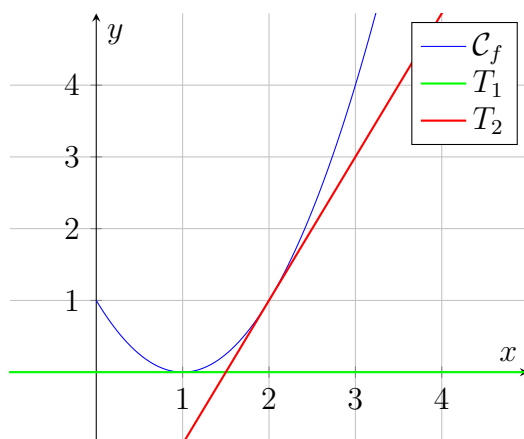
**Exercice 2 :** Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$ . Calculer la dérivée de  $g$  en  $a = 2$ .

**Exercice 3 :** Soit  $h$  la fonction définie par  $h(x) = \sqrt{x+1}$ . Calculer la dérivée de  $h$  en  $a = 3$ .

**Exercice 4 :** Soit  $k$  la fonction définie par  $k(x) = |x - 2|$ . Calculer la dérivée de  $k$  en  $a = 4$  et en  $a = 2$ .

**Exercice 5 :** Soit  $m$  la fonction définie par  $m(x) = \frac{1}{x+1}$ . Calculer la dérivée de  $m$  en  $a = 0$ .

**Exercice 6 :** On considère la courbe représentative de la fonction  $f$  ci-dessous.



1. (a) Déterminer graphiquement l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.  
(b) En déduire la valeur de la dérivée de  $f$  en 1.
2. (a) Déterminer graphiquement l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.  
(b) En déduire la valeur de la dérivée de  $f$  en 2.