

FO 11 - Fonction polynôme du second degré

Cours

Définition : Une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur \mathbb{R} par :

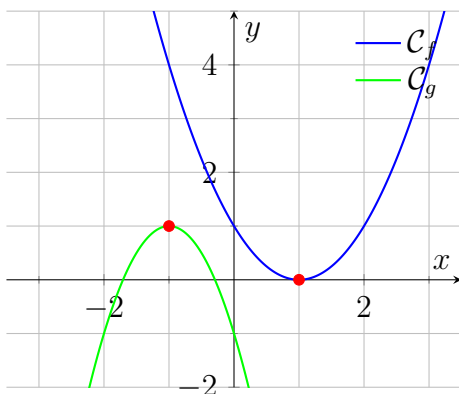
$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$

Propriété - Allure : La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.

Remarque : La parabole est tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.

Définition : Le sommet de la parabole est le point de coordonnées $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. On les nomme parfois (α, β) .

Exemples : Soit $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = -2x^2 - 4x - 1$. Leurs courbes représentatives sont les suivantes :



Propriété - Variations : Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Le tableau de variations de f est le suivant :

| | | | |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $\frac{-b}{2a}$ | $+\infty$ |
| $a > 0$ | ↘ ↗ | | |
| $a < 0$ | ↗ ↘ | | |

Définition : On appelle racine d'un polynôme P une valeur r telle que $P(r) = 0$.

Propriété - Racines : Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Le nombre de racines de f dépend du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta < 0$: f n'a pas de racines (Graphiquement, sa courbe ne coupe pas l'axe des abscisses).
- Si $\Delta = 0$: f a une seule racine $\frac{-b}{2a}$ (comme C_f dans l'exemple).
- Si $\Delta > 0$: f a deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ (Comme C_g dans l'exemple).

Propriété - signe : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Le signe de f dépend des signes du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et de a :

- Si $\Delta < 0$: f est du signe de a .
- Si $\Delta = 0$: f est du signe de a sauf en $x_0 = \frac{-b}{2a}$ où f est nul.
- Si $\Delta > 0$:

| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ | |
|---------|-----------|-------|-------|-----------|---|
| $a > 0$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $a < 0$ | - | 0 | + | 0 | - |

Propriété - Différentes formes : On retiendra les trois formes suivantes pour une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$:

- Forme développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Forme factorisée : Si $\Delta < 0$: Aucune ; Si $\Delta = 0$: $f(x) = a(x-x_0)^2$; Si $\Delta > 0$: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.
- Forme canonique : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

Exemple : Soit $g(x) = -x^2 + 4x - 3$.

- $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 16 - 12 = 4 > 0$.

Donc g a deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = 1$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = 3$.

- La forme factorisée de g est donc $g(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = -1(x-1)(x-3)$.

- $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$ et $\beta = g(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1$.

Donc la forme canonique de g est $g(x) = -1(x-2)^2 + 1$ et le sommet de la parabole C_g est le point $(2; 1)$.

- Le signe et les variations de g sont donnés par le tableau suivant :

| x | $-\infty$ | 1 | 2 | 3 | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|---|---|---|-----------|
| signe de $g(x)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| variations de g | | | | | |

Exercices

Exercice : En vous inspirant de l'exemple du cours, donner pour chaque polynôme du second degré suivant :

son Δ ; ses racines (s'il y en a) ; sa forme factorisée (si elle existe) ; sa forme canonique ; le sommet de sa parabole ; son tableau de signes ; son tableau de variations puis tracer l'allure de sa courbe.

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2$$

$$k(x) = -3x^2 + 6x - 3$$

$$p(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$g(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$$m(x) = x^2 - 9$$

$$q(x) = -2x^2 + 8x - 6$$

$$h(x) = x^2 + 2x + 5$$

$$n(x) = 4x^2 + 4x + 1$$

$$r(x) = 5x^2 + 10x + 15$$