FO 10 - Parité d'une fonction

Cours

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire tel que si $x \in I$ alors $-x \in I$). On dit que :

- f est une fonction paire si Pour tout $x \in I, f(-x) = f(x)$.
- f est une fonction impaire si Pour tout $x \in I, f(-x) = -f(x)$.

Exemples :

1. Soit $f(x) = x^2$. $D_f = \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Donc f est paire.
2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. $D_f = \mathbb{R}^*$ symétrique par rapport à 0.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$. Donc f est impaire.

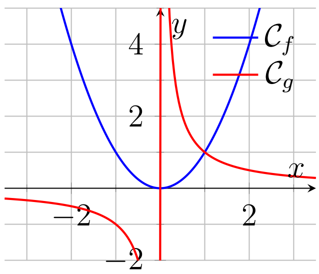
Remarque : Attention à ne pas confondre la parité définie sur les entiers et celle définie pour les fonctions.

Propriétés : Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative.

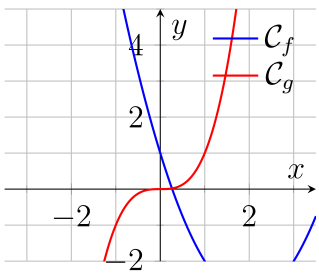
- f est paire $\Leftrightarrow$ C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire $\Leftrightarrow$ C_f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemples :

1. $f(x) = x^2$ est paire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
   $g(x) = \dfrac{1}{x}$ est impaire onc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.



2. On considère les courbes représentatives suivantes :



C_f n'est ni symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ni par rapport à l'origine. Elle n'est donc ni paire ni impaire.
C_g semble symétrique par rapport à l'origine. Elle est donc probablement paire.

Remarque : La parité est essentielle, elle permet souvent de diviser l'intervalle d'étude d'une fonction par 2.

Propriété : La plupart des fonctions ne sont ni paires ni impaires.

Exemple : Soit $f(x) = x^2 + x$
$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$
En particulier : $f(1) = 2$ et $f(-1) = 0$. Donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$.
Donc : f n'est ni paire ni impaire.

Exercices

Exercice 1 : Pour chaque intervalle, préciser si il est symétrique par rapport à l'origine. Aucune justification attendue.
$I = \mathbb{R}$ $\quad J =]-10; 5]$ $\quad K = [-\pi; \pi]$ $\quad L = \mathbb{R}^*$ $\quad M = \mathbb{R}^+$

Exercice 2 : Pour chaque fonction, déterminer son domaine de définition puis préciser si elle est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre. Justifier.

1. $f(x) = x^3 - 3x$
2. $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$
3. $h(x) = x^4 - x^2$
4. $k(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

Exercice 3 : Pour chaque fonction, déterminer son domaine de définition puis préciser si elle est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre. Justifier.

1. $f(x) = x^5 + 2x^3 - x$
2. $g(x) = \sqrt{x^2}$
3. $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$
4. $k(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$

Exercice 4 : En étudiant le graphique ci-dessous, dire pour chaque fonction représentée si elle semble paire, impaire ou ni l'un ni l'autre.