EN 14 : Intersection et réunion

Cours

Définition : L'intersection de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

Exemple : Soit $A = \{1; 2; 3; 4\}$ et $B = \{3; 4; 5; 6\}$. L'intersection de A et B est $A \cap B = \{3; 4\}$ car 3 et 4 sont les seuls éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

Définition : La réunion de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux).

Exemple : Soit $A = \{1; 2; 3; 4\}$ et $B = \{3; 4; 5; 6\}$. La réunion de A et B est $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ car tous les éléments de A et de B sont inclus dans la réunion.

Exemples :

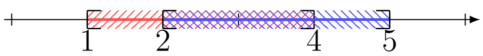
1. Soit $C = \{\text{rouge}; \text{vert}; \text{bleu}\}$ et $D = \{\text{bleu}; \text{jaune}; \text{noir}\}$.
   Alors : $C \cap D = \{\text{bleu}\}$ et $C \cup D = \{\text{rouge}; \text{vert}; \text{bleu}; \text{jaune}; \text{noir}\}$.
2. Soit $G = \{1; 2; 3\}$ et $H = \{4; 5; 6\}$.
   Alors : $G \cap H = \emptyset$ (l'ensemble vide) et $G \cup H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Remarque : Les intersections et réunions s'appliquent aussi aux intervalles.

Méthode : Pour déterminer l'intersection ou la réunion de deux intervalles, il est souvent plus simple de les représenter graphiquement sur une droite graduée et d'hachurer d'une couleur différente chaque intervalle.

- Un nombre est dans l'intersection si et seulement si les deux hachurages sont présents.
- Un nombre est dans l'union dès qu'au moins l'un des hachurages est présents.

Exemple : Soit $I = [1; 4]$ et $J = [2; 5]$.
Représentation graphique :



On constate que l'intersection est l'intervalle $[2; 4]$ (les deux hachurages sont présents) et que la réunion est l'intervalle $[1; 5]$ (au moins un des hachurages est présent).

Exemples :

1. Soit $K =]-3; 2[$ et $L = [0; 3]$.
   Alors : $K \cap L = [0; 2[$ et $K \cup L =]-3; 3]$.
2. Soit $M = [-5; 0]$ et $N =]0; 2]$.
   Alors : $M \cap N = \emptyset$ (l'ensemble vide) et $M \cup N = [-5; 2]$.
3. Soit $O =]2; +\infty[$ et $P =]-\infty; 3]$.
   Alors : $O \cap P =]2; 3]$ et $O \cup P =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

Remarques :

- Si les intervalles n'ont aucun élément en commun (intersection vide), on dit qu'ils sont disjoints.
- Si les intervalles sont disjoints, on ne peut pas écrire la réunion d'intervalle plus simplement qu'avec le symbole $\cup$.

Exercices

Exercice 1 : Déterminer l'intersection et la réunion des ensembles finis suivants :

1. Soit $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et $B = \{4; 5; 6; 7; 8\}$.
2. Soit $C = \{\text{a}; \text{b}; \text{c}\}$ et $D = \{\text{b}; \text{c}; \text{d}; \text{e}\}$.
3. Soit $E = \{10; 20; 30\}$ et $F = \{40; 50; 60\}$.

Exercice 2 : Déterminer l'intersection et la réunion des ensembles finis suivants :

1. Soit $I = \{2; 4; 6; 8\}$ et $J = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.
2. Soit $K = \{\text{rouge}; \text{vert}\}$ et $L = \{\text{bleu}; \text{jaune}; \text{vert}\}$.
3. Soit $M = \{a; e; i; o; u\}$ et $N = \{e; i; u; y\}$.

Exercice 3 : Après avoir représenté les intervalles sur une droite graduée avec les hachurages, déterminer l'intersection et la réunion des ensembles suivants :

1. Soit $A = [1; 5]$ et $B = [3; 7]$.
2. Soit $C =]-2; 2[$ et $D = [0; 4]$.
3. Soit $E = [-4; 0]$ et $F =]1; 3]$.
4. Soit $G =]3; +\infty[$ et $H =]-\infty; 5]$.

Exercice 4 : Déterminer l'intersection et la réunion des ensembles suivants :

1. Soit $I =]-1; 4]$ et $J = [2; 6[$.
2. Soit $K = [-3; 1]$ et $L =]0; 3]$.
3. Soit $M =]-\infty; 2]$ et $N = [5; +\infty[$.
4. Soit $O = [0; 3[$ et $P = [3; 7]$.

Exercice 5 : Soit les intervalles : $A = [2; 6]$, $B =]4; 8[$ et $C = [5; 10[$.
Déterminer :

1. $A \cap B \cap C$
2. $(A \cup B) \cap C$
3. $A \cup (B \cap C)$
4. $A \cup B \cup C$