

EN 12 : Les ensembles finis

Cours

Définition : Un ensemble fini est un ensemble qui contient un nombre fini d'éléments.

Remarque : On peut donc compter le nombre d'éléments dans un ensemble fini.

Notation : Un ensemble fini est délimité par des accolades $\{\}$ et les éléments sont séparés par des points-virgules ou des virgules (cela peut varier selon les pays).

Exemples :

- L'ensemble des jours de la semaine : $\{\text{lundi; mardi; mercredi; jeudi; vendredi; samedi; dimanche}\}$ est un ensemble fini contenant 7 éléments.
- L'ensemble des mois de l'année : $\{\text{janvier; février; mars; avril; mai; juin; juillet; août; septembre; octobre; novembre; décembre}\}$ est un ensemble fini contenant 12 éléments.
- L'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs à 10 : $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ est un ensemble fini contenant 10 éléments.

Notation : Le nombre d'éléments dans un ensemble fini A se nomme le cardinal de A et est noté $|A|$ ou $\text{card}(A)$.

Exemples :

- $A = \{1; 3; 5; 7\}$, alors $|A| = 4$ car A contient 4 éléments.
- $B = \{\text{rouge; vert; bleu}\}$, alors $|B| = 3$ car B contient 3 éléments.

Rappel : Nous avons déjà vu la notion d'appartenance et d'inclusion des ensembles de nombres. Ces notions s'appliquent aussi aux ensembles finis.

Exemples :

- $2 \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ car 2 est un élément de l'ensemble.
- $5 \notin \{0; 1; 2; 3; 4\}$ car 5 n'est pas un élément de l'ensemble.
- $\{1; 2\} \subset \{0; 1; 2; 3; 4\}$ car tous les éléments de $\{1; 2\}$ appartiennent à $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.
- $\{2; 5\} \not\subset \{0; 1; 2; 3; 4\}$ car 5 n'appartient pas à $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.
- Si $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{2; 3; 4; 5\}$, alors $A \not\subset B$ car 1 n'appartient pas à B .

Remarque : Un ensemble peut être vide, c'est à dire ne contenir aucun élément. On le note \emptyset ou $\{\}$.

Exemple : L'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs à 0 est l'ensemble vide : $\{\}$ car il n'existe pas de nombre entier naturel inférieur à 0.

Propriété : On peut considérer des ensembles de tout types d'objets et en particulier des ensembles d'ensembles.

Exemple : Soit $A = \{1; 2\}$ et $B = \{3; 4\}$. L'ensemble $C = \{A; B\} = \{\{1; 2\}; \{3; 4\}\}$ est un ensemble contenant deux éléments qui sont eux-mêmes des ensembles.

Remarque : Les ensembles que nous avons étudiés dans les fiches précédentes (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{D} et \mathbb{Q}) ne sont pas des ensembles finis.

Exercices

Exercice 1 : Donner le cardinal des ensembles suivants :

1. $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$
2. $B = \{\text{lundi; mardi; mercredi; jeudi; vendredi}\}$
3. $C = \{a; b; c; d; e; f; g; h; i; j\}$
4. $D = \{\}$
5. $E = \{\text{rouge; vert; bleu; jaune}\}$
6. $F = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

Exercice 2 : Pour chaque ensemble, indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. Soit $A = \{1; 2; 3; 4\}$. $2 \in A$
2. Soit $B = \{\text{rouge; vert; bleu}\}$. $\text{jaune} \in B$
3. Soit $C = \{5; 6; 7\}$. $\{5; 6\} \subset C$
4. Soit $D = \{a; b; c; d\}$. $\{b; e\} \subset D$
5. Soit $E = \{10; 20; 30; 40; 50\}$. $|E| = 6$
6. Soit $F = \{\}$. $|F| = 0$

Exercice 3 : Soit $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{2; 3; 4; 5\}$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. $1 \in A$
2. $4 \in A$
3. $B \subset A$
4. $A \subset B$
5. $|A| = 3$
6. $|B| = 5$

Exercice 4 : Écrire les ensembles suivants en extension (c'est à dire en listant tous leurs éléments) :

1. L'ensemble des jours du week-end.
2. L'ensemble des mois de l'année qui ont 30 jours.
3. L'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs ou égal à 5.
4. L'ensemble des couleurs primaires (en synthèse soustractive).
5. L'ensemble des nombres entiers naturels pairs inférieurs ou égal à 10.

Exercice 5 : Soit $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{3; 4; 5\}$. Construire l'ensemble C qui contient tous les éléments de A et de B .

Exercice 7 : Recopier et compléter les phrases suivantes avec les symboles \in , \notin , \subset ou $\not\subset$:

1. $3 \quad \dots \quad \{1; 2; 3; 4; 5\}$
2. $6 \quad \dots \quad \{1; 2; 3; 4; 5\}$
3. $\{2; 3\} \quad \dots \quad \{1; 2; 3; 4; 5\}$
4. $\{4; 6\} \quad \dots \quad \{1; 2; 3; 4; 5\}$
5. $\{1; 2; 3\} \quad \dots \quad \{3; 4; 5; 6\}$
6. $\{4; 5\} \quad \dots \quad \{3; 4; 5; 6\}$