

CN20 : Puissances - règles de calculs

Cours

Propriétés : Soit a et b deux nombres relatifs et m et n deux entiers naturels non nuls :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (avec $a \neq 0$)

Exemples :

1. $3^4 \times 3^2 = 3^{4+2} = 3^6 = 729$
2. $\frac{(-3)^5}{(-3)^3} = (-3)^{5-3} = (-3)^2 = 9$

Propriété : Soit $a, b \neq 0$ et n un entier naturel non nul :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{et} \quad (a^m)^n = a^{m \times n}$$

Exemples :

1. $(3^4)^2 = 3^{4 \times 2} = 3^8 = 6561$
2. $\left(\frac{-3}{4}\right)^2 = \frac{(-3)^2}{4^2} = \frac{9}{16}$
3. $(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4 = 16 \times 81 = 1296$
4. $(-2 \times -5)^3 = (-2)^3 \times (-5)^3 = -8 \times -125 = 1000$

Propriété : L'inverse d'une puissance s'écrit avec un exposant négatif. Soit $a, b \neq 0$ et n un entier naturel non nul :

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad ; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \quad ; \quad \left(\frac{b}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exemples :

$$\frac{1}{3^4} = 3^{-4} \quad ; \quad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \quad ; \quad \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{2} \quad ; \quad \left(\frac{-3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{-3}\right)^3 = \frac{64}{-27}$$

Méthode : Quand des nombres apparaissent dans les puissances, on peut utiliser les propriétés des puissances pour simplifier les calculs.

Exemples :

- $A = 2^3 \times 2^4 \times 2^2 = 2^{3+4+2} = 2^9 = 512$
- $B = \frac{5^7}{5^3 \times 5^2} = \frac{5^7}{5^{3+2}} = \frac{5^7}{5^5} = 5^{7-5} = 5^2 = 25$
- $C = \frac{3^4 \times 2^3}{6^2} = \frac{3^4 \times 2^3}{(3 \times 2)^2} = \frac{3^4 \times 2^3}{3^2 \times 2^2} = 3^{4-2} \times 2^{3-2} = 3^2 \times 2^1 = 9 \times 2 = 18$
- $D = \frac{4^5 \times 2^{-3}}{8^{-2}} = \frac{(2^2)^5 \times 2^{-3}}{(2^3)^{-2}} = \frac{2^{10} \times 2^{-3}}{2^{-6}} = 2^{10-3+6} = 2^{13} = 8192$
- $E = \frac{25^2 \times 16^5}{20^4} = \frac{(5^2)^2 \times (2^4)^5}{(2 \times 5)^4} = \frac{5^4 \times 2^{20}}{2^4 \times 5^4} = 2^{20-4} = 2^{16}$
- $F = \frac{39^{-3} \times 51^2}{26^{-4} \times 17^2} = \frac{(3 \times 13)^{-3} \times (3 \times 17)^2}{(2 \times 13)^{-4} \times 17^2} = \frac{3^{-3} \times 13^{-3} \times 3^2 \times 17^2}{2^{-4} \times 13^{-4} \times 17^2} = 2^4 \times 3^{-3+2} \times 13^{-3+4} = 16 \times 3^{-1} \times 13^1 = \frac{16 \times 13}{3} = \frac{208}{3}$

Exercices

Exercice 1 : Calculer les expressions suivantes :

1) $A = 4^3 \times 4^2$

2) $B = \frac{7^5}{7^2}$

3) $C = (3^2)^4$

4) $D = \left(\frac{5}{2}\right)^3$

Exercice 2 : Calculer les expressions suivantes :

1) $E = 2^4 \times 2^{-3}$

2) $F = \frac{10^6}{10^4}$

3) $G = (4^3)^2$

4) $H = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

Exercice 3 : Ecrire les expressions suivantes sous la forme d'une puissance d'un seul nombre :

1) $I = 5^3 \times 5^4 \times 5^2$

2) $J = \frac{3^7}{3^3 \times 3^2}$

3) $K = \frac{2^5 \times 4^3}{8^2}$

4) $L = \frac{9^4 \times 3^{-3}}{27^2}$

Exercice 4 : Simplifier les expressions suivantes :

1) $M = 6^5 \times 6^{-2} \times 6^3$

2) $N = \frac{4^8}{4^5 \times 4^2}$

3) $O = \frac{5^6 \times 25^2}{125^3}$

4) $P = \frac{18^4 \times 6^{-3}}{3^{-2} \times 2^4}$

Exercice 5 : Simplifier les expressions suivantes :

1) $Q = \frac{12^3 \times 8^{-2}}{6^{-1} \times 4^2}$

2) $R = \frac{45^{-2} \times 75^3}{15^{-1} \times 9^2}$

3) $S = \frac{14^4 \times 21^{-3}}{7^{-2} \times 6^2}$

4) $T = \frac{50^5 \times 18^{-4}}{25^{-2} \times 9^3}$