

CL5 : Problèmes conduisant à une équation

Cours

Définition : Un **problème** est une situation qui nécessite de faire des calculs pour trouver une solution. Pour trouver la solution, il faut parfois construire une équation. On dit que l'on a effectué une modélisation.

Méthode : Pour résoudre un problème conduisant à une équation, on suit les étapes suivantes :

1. On lit attentivement le problème pour bien comprendre la situation.
2. On choisit une lettre pour représenter la valeur inconnue.
3. On traduit la situation en une équation en utilisant les données et la lettre choisie.
4. On résout l'équation obtenue.
5. On fait une phrase réponse en donnant la solution du problème.

Exemple :

- **Problème :** La moitié d'un nombre diminuée de 3 est égale à 5. Quel est ce nombre ?

- **Solution :**

1. Soit x le nombre cherché.
2. Le problème se modélise par l'équation $\frac{x}{2} - 3 = 5$.
3. On résout l'équation :
$$\frac{x}{2} - 3 = 5 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 5 + 3 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 8 \Leftrightarrow x = 8 \times 2 \Leftrightarrow x = 16$$
4. Le nombre cherché est 16.

Remarque : En général, la modélisation intervient dans des problèmes correspondant à une situation concrète.

Exemples :

1. **Problème :** Un sac contient deux fois plus de billes qu'un autre sac. En tout, il y a 18 billes. Combien y a-t-il de billes dans chaque sac ?

Solution :

- (a) Soit x le nombre de billes dans le premier sac. Le second sac contient donc $2x$ billes.
- (b) Le nombre total de billes est donné par l'équation $x + 2x = 18$.
- (c) On résout l'équation :
$$x + 2x = 18 \Leftrightarrow 3x = 18 \Leftrightarrow x = \frac{18}{3} \Leftrightarrow x = 6$$
- (d) Le premier sac contient 6 billes et le second sac en contient $2 \times 6 = 12$.

2. **Problème :** Léa a 5 ans de plus que sa sœur. Dans 3 ans, elle aura le double de l'âge de sa sœur. Quel est l'âge actuel de chacune ?

Solution :

- (a) Soit x l'âge actuel de la sœur de Léa. Léa a donc $x + 5$ ans.
- (b) Dans 3 ans, la sœur de Léa aura $x + 3$ ans et Léa aura $(x + 5) + 3 = x + 8$ ans.
- (c) L'équation se modélise par $(x + 5) + 3 = 2 \times (x + 3)$.

(d) On résout l'équation :

$$\begin{aligned}(x + 5) + 3 &= 2 \times (x + 3) \\ \Leftrightarrow x + 8 &= 2x + 6 \\ \Leftrightarrow 8 - 6 &= 2x - x \\ \Leftrightarrow 2 &= x\end{aligned}$$

(e) La sœur de Léa a 2 ans et Léa a $2 + 5 = 7$ ans.

3. **Problème :** Un article après une réduction de 15 € coûte 51 €. Quel était son prix initial ?

Solution :

- (a) Soit x le prix initial de l'article.
- (b) Après une réduction de 15 €, le prix devient $x - 15$.
- (c) L'équation se modélise par $x - 15 = 51$.
- (d) On résout l'équation :

$$\begin{aligned}x - 15 &= 51 \\ \Leftrightarrow x &= 51 + 15 \\ \Leftrightarrow x &= 66\end{aligned}$$

(e) Le prix initial de l'article était de 66 €.

Exercices

Exercice 1 : Résoudre les problèmes suivants :

1. La moitié d'un nombre diminuée de 4 est égale à 6. Quel est ce nombre ?
2. Un nombre est égal à 3 fois un autre nombre. La somme des deux nombres est égale à 48. Quels sont ces nombres ?
3. Le double d'un nombre augmenté de 5 est égal à 21. Quel est ce nombre ?

Exercice 2 : Résoudre les problèmes suivants :

1. La somme de l'âge de Paul et de l'âge de Marie est égale à 30 ans. Paul a 4 ans de plus que Marie. Quel est l'âge de chacun ?
2. Un sac contient 3 fois plus de billes qu'un autre sac. En tout, il y a 24 billes. Combien y a-t-il de billes dans chaque sac ?
3. Léa a 6 ans de plus que sa sœur. Dans 4 ans, elle aura le double de l'âge de sa sœur. Quel est l'âge actuel de chacune ?

Exercice 3 : Résoudre les problèmes suivants :

1. Un article après une réduction de 20 € coûte 60 €. Quel était son prix initial ?
2. Un nombre augmenté de 7 est égal à 3 fois un autre nombre. La somme des deux nombres est égale à 40. Quels sont ces nombres ?
3. La somme de l'âge de Jean et de l'âge de Luc est égale à 50 ans. Jean a 10 ans de plus que Luc. Quel est l'âge de chacun ?