

AR 3 : Nombres premiers

Cours

Définition : Un entier positif non nul est dit premier lorsqu'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemples : 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23 sont des nombres premiers. 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Méthode - Le crible d'Eratosthène : Pour identifier les nombres premiers, on peut parcourir les nombres dans l'ordre croissant en partant de 2. On barre tous les multiples du nombre rencontré. Tous les nombres qui ne sont pas barrés sont premiers.

☐ Multiples de 2	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	☒ Multiples de 2	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
☐ Multiples de 3	11 12 13 14 15 16 17 18 19 20	☐ Multiples de 3	11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
☐ Multiples de 5	21 22 23 24 25 26 27 28 29 30	☐ Multiples de 5	21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
☐ Multiples de 7	31 32 33 34 35 36 37 38 39 40	☐ Multiples de 7	31 32 33 34 35 36 37 38 39 40
☐ Multiples de 11	41 42 43 44 45 46 47 48 49 50	☐ Multiples de 11	41 42 43 44 45 46 47 48 49 50
	51 52 53 54 55 56 57 58 59 60		51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
	61 62 63 64 65 66 67 68 69 70		61 62 63 64 65 66 67 68 69 70
	71 72 73 74 75 76 77 78 79 80		71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
	81 82 83 84 85 86 87 88 89 90		81 82 83 84 85 86 87 88 89 90
	91 92 93 94 95 96 97 98 99 100		91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

☒ Multiples de 2	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	☒ Multiples de 2	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
☒ Multiples de 3	11 12 13 14 15 16 17 18 19 20	☒ Multiples de 3	11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
☐ Multiples de 5	21 22 23 24 25 26 27 28 29 30	☒ Multiples de 5	21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
☐ Multiples de 7	31 32 33 34 35 36 37 38 39 40	☐ Multiples de 7	31 32 33 34 35 36 37 38 39 40
☐ Multiples de 11	41 42 43 44 45 46 47 48 49 50	☐ Multiples de 11	41 42 43 44 45 46 47 48 49 50
	51 52 53 54 55 56 57 58 59 60		51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
	61 62 63 64 65 66 67 68 69 70		61 62 63 64 65 66 67 68 69 70
	71 72 73 74 75 76 77 78 79 80		71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
	81 82 83 84 85 86 87 88 89 90		81 82 83 84 85 86 87 88 89 90
	91 92 93 94 95 96 97 98 99 100		91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

☒ Multiples de 2	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	☒ Multiples de 2	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
☒ Multiples de 3	11 12 13 14 15 16 17 18 19 20	☒ Multiples de 3	11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
☒ Multiples de 5	21 22 23 24 25 26 27 28 29 30	☒ Multiples de 5	21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
☒ Multiples de 7	31 32 33 34 35 36 37 38 39 40	☒ Multiples de 7	31 32 33 34 35 36 37 38 39 40
☐ Multiples de 11	41 42 43 44 45 46 47 48 49 50	☒ Multiples de 11	41 42 43 44 45 46 47 48 49 50
	51 52 53 54 55 56 57 58 59 60		51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
	61 62 63 64 65 66 67 68 69 70		61 62 63 64 65 66 67 68 69 70
	71 72 73 74 75 76 77 78 79 80		71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
	81 82 83 84 85 86 87 88 89 90		81 82 83 84 85 86 87 88 89 90
	91 92 93 94 95 96 97 98 99 100		91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

Remarque : 2 est donc le seul nombre pair premier.

Propriété - Décomposition en produit de facteurs premiers :

Tout nombre entier n supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme produit (multiplication) de nombres premiers.

Exemples : $924 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$ et $330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$

Méthode : On divise successivement le nombre par tous ses diviseurs premiers en les parcourant dans l'ordre croissant (on peut s'aider des critères de divisibilité).

Exemple :

3150	2
1575	3
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

On obtient ainsi : $3150 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$

Exercices

1. **Vrai ou faux :** Pour chaque affirmation, indique si elle est vraie ou fausse. Justifie.

2 est un nombre premier.

1 est un nombre premier.

51 est un nombre premier.

37 est divisible par 3.

2. **Complète les phrases :**

Le seul nombre premier pair est ...

Un nombre premier a exactement ... diviseurs.

19 est un nombre ...

Tous les autres nombres pairs ...

3. **Reconnaissance :** Parmi les nombres suivants, entoure ceux qui sont premiers :

9 17 21 29 35 41 51 53

4. **Crible d'Eratosthène :** Utilise la méthode du crible d'Eratosthène pour trouver tous les nombres premiers inférieurs à 50.

5. **Divisibilité :** Explique pourquoi 87 n'est pas un nombre premier sans effectuer la division complète.

6. **Décomposition en facteurs premiers :** Décompose les nombres suivants en produit de facteurs premiers :

30

42

84

100

7. **Application :** Un nombre est divisible par 2 et par 3, mais ce n'est pas un multiple de 6. Peut-il être un nombre premier ? Justifie ta réponse.

8. **Défi :** Trouve un nombre de deux chiffres qui n'est pas premier, mais qui n'est divisible que par 1, lui-même et un seul autre nombre. Quel est ce nombre ?

9. **Problème ouvert :** Trouve deux nombres premiers consécutifs dont la somme est égale à 60.